

アキバとトビカヒ線図

オムニバズ講義

2019/4/11

$$\underline{\text{アキバ}} \quad P = \{(X, Y) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid X+Y+1=0\} = \{X \in \mathbb{C}^* \mid X \neq -1\}$$

$$0 \neq Y = -X-1$$

$$0 < t < 1 \text{ 実数} \quad \{(\log_t |X|, \log_t |Y|) \mid (X, Y) \in P\} \\ \in \mathbb{R}^2$$

 $\exists P \text{ の } \text{アキバ} \text{ (amoeba) とは、}$

$$|Y| = |-X-1| = |X+1|$$

$$Y = -X-1$$

三角不等式より

$$||X|-1| \leq |Y| \leq 1+|X|$$

$$\begin{array}{c} \circ \\ -i \end{array}$$

$$|X| = \text{fix } 17.23$$

$$\text{or } Y = 17.23$$

アキバ

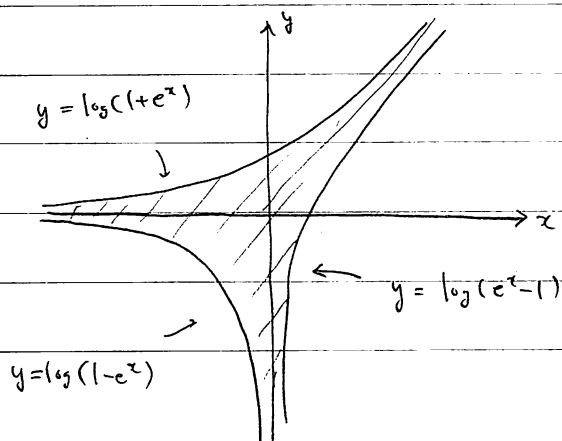
$$\left\{ \frac{1}{\log t} (\log |X|, \log |Y|) \mid (X, Y) \in P \right\}$$

$$\log t < 0 \\ t \rightarrow 0^+ \text{ とき}$$

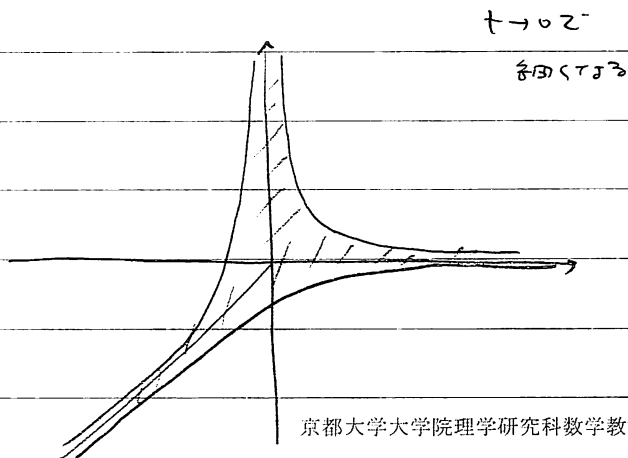
$$x = \log |X|, \quad y = \log |Y| \text{ とおく}$$

$$|e^x - 1| \leq e^y \leq 1 + e^x$$

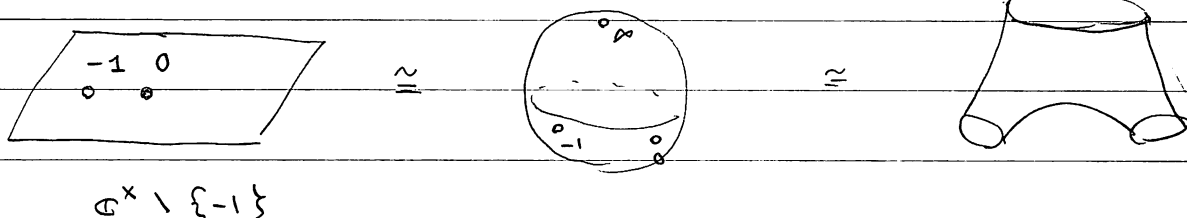
$$\begin{cases} x > 0 \text{ のとき} & \log(e^x - 1) \leq y \leq \log(1 + e^x) \\ x < 0 \text{ のとき} & \log(1 - e^x) \leq y \leq \log(1 + e^x) \end{cases}$$



$$\frac{1}{\log t} \rightarrow$$



・ P は pair of pants と呼ばれる (曲面の構成要素)



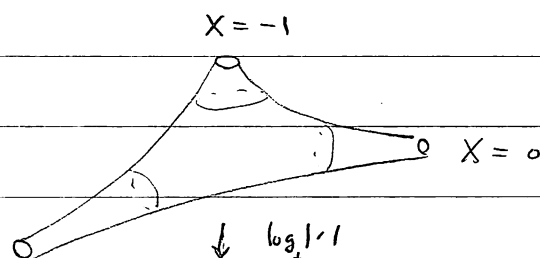
球面から3点を除く
($\mathbb{CP}^1$)

・ $X \rightarrow -1$ のとき $Y \rightarrow 0$

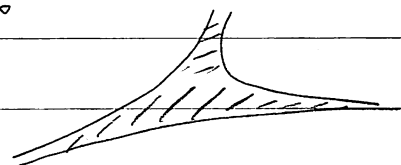
$$\log_t |X| \rightarrow 0, \log_t |Y| \rightarrow +\infty$$

3次元空間に写す

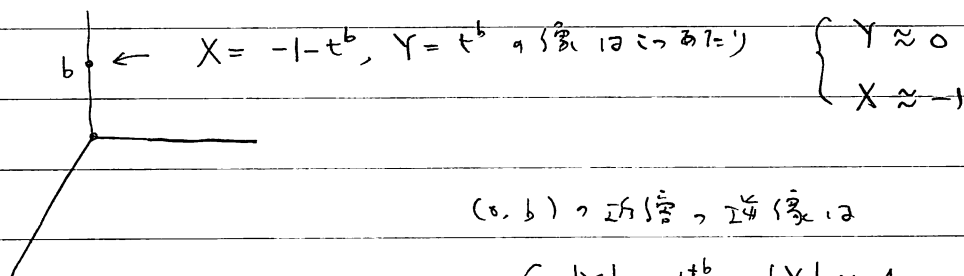
($X \rightarrow 0, X \rightarrow \infty$ のときも同様)



$X = \infty$



・ $t \rightarrow 0$ のとき (トポロジカル極限)

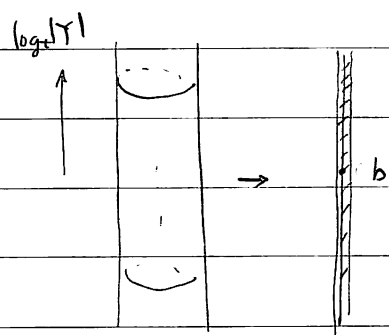


「トポロジカル多様体」に4次元

(a, b) の近傍、近傍は

$$\begin{cases} |Y| \approx t^b & |X| \approx 1 \\ X + Y + 1 = 0 \end{cases}$$

cancel する

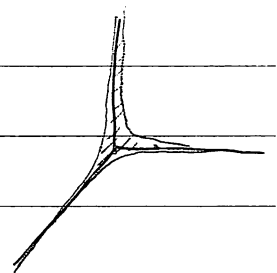
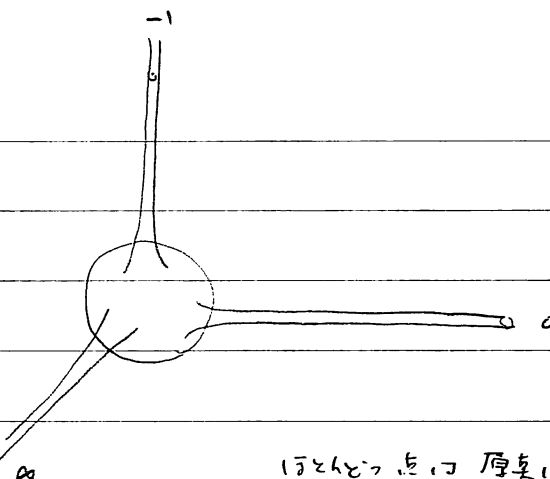
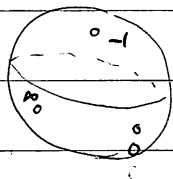


$\arg Y$

$$\begin{cases} \cdot Y \text{ の偏角は } 360^\circ \text{ になる} \\ \cdot X \approx -1 \end{cases}$$

→ 近傍は S^1

$0 < t$ が小さいとき

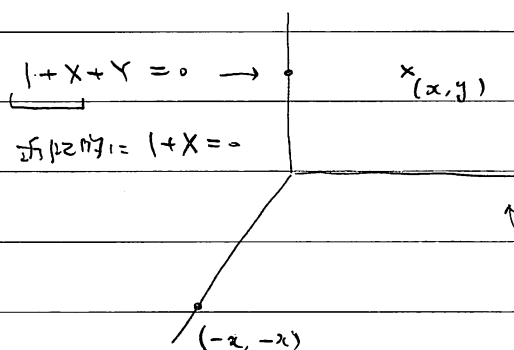


$0, -1, \infty$ の近傍を $t \rightarrow 0$ で ∞ になる

1 と $t \rightarrow 0$ の点に $t \rightarrow 0$ で ∞ になる

3次元

このとき 12 次元 $t \rightarrow 0$ のとき



$x, y > 0$ のとき

$$|x| \approx t^x, |y| \approx t^y \quad (0 \text{ に近い})$$

$$x+y+1=0 \quad \text{が成立しない} \quad (t \text{ が小さいとき})$$

$$\text{近似的に } 1+y=0$$

$$\text{一般に } x = \log_t |x|, y = \log_t |y|$$

かつ

$$|x| = t^x, |y| = t^y, |1| = t^0$$

$$|x| \approx t^x, |y| \approx t^y \gg 1$$

$$x+y+1=0$$

このとき x, y が ∞ になる

$$\left(\text{近似的に } x+y \approx 0 \right)$$

よ

$$x \approx y \text{ となる}$$

$x, y, 0$ のうち 0 が最小

$x, y, 0$ のうち 0 が唯一の最小値

$$\leadsto x+y+1=0 \quad \text{が成立しない}$$

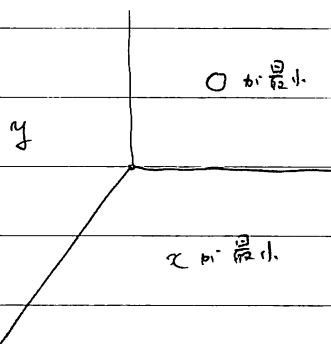
$x, y, 0$ のうち 0 が最小値

$\leadsto$ cancellation が起きる

$$f(x, y) = \min(x, y, 0)$$

トピカル多様体

= f の non-smooth locus



トポロジカル代数

演習 $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +0} \log_t(t^x + t^y) = \min(x, y)$

$$\log_t(t^x \cdot t^y) = x + y$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{足し算} \rightsquigarrow \min \\ \text{かけ算} \rightsquigarrow + \end{array} \right\} (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +) \text{ は semifield ではない}$$

・ $\{\infty\}$ は $\min$ の単位元 (ゼロ元)

・ $\min$ に閉じた環ではない

・ 分配法則

$$\min(a, b) + c = \min(a+c, b+c)$$

例 1, 例 2

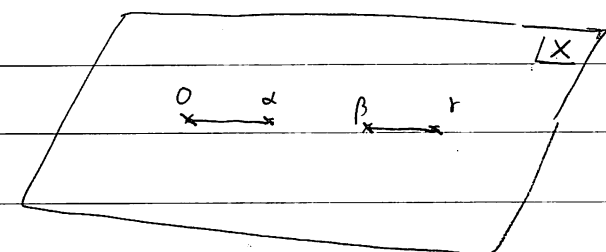
$$X + Y + \frac{t}{XY} = 1 \quad : \text{楕円曲線} \quad (X, Y \in \mathbb{C}^*)$$

$$Y^2 + (X-1)Y + \frac{t}{X} = 0 \quad Y = \frac{1}{2} \left(-(X-1) \pm \sqrt{(X-1)^2 - \frac{4t}{X}} \right)$$

$$\text{分岐点} \begin{cases} (X-1)^2 = \frac{4t}{X} & 3 \text{ 点} \\ X=0 & 1 \text{ 点} \end{cases}$$

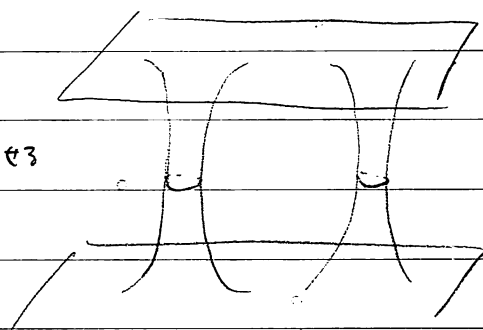
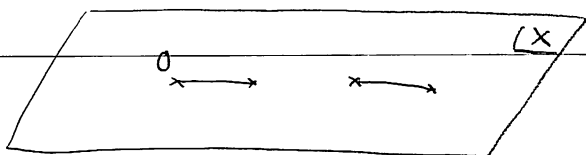
このように区別する

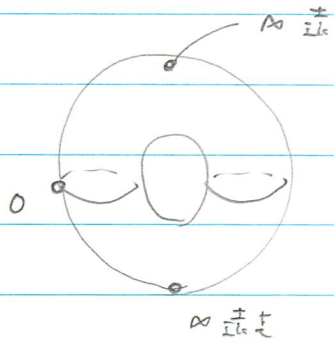
$\sqrt{\quad}$ の branch が 2 あり



2つの sheet を

用意している

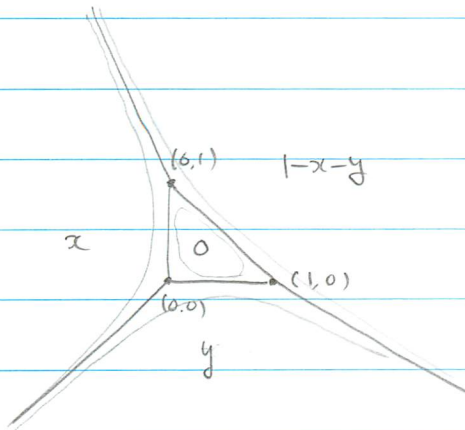




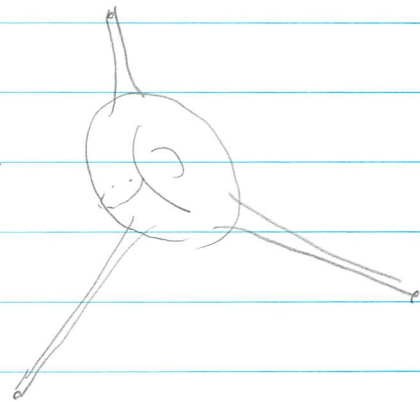
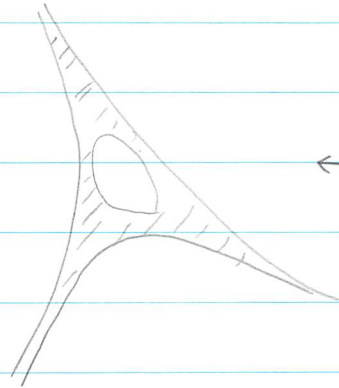
つまり torus T^2 \ 3 葉 と 同相の空間

tropical 多項式

tropical 化 $X + Y + \frac{t}{XY} - 1 \rightsquigarrow \min(x, y, 1-x-y, 0)$



$t \rightarrow 0$



2 つ以上同時に min を実現

演習 各頂点において出る辺の方向 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ とすると

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$ が成立する. この理由を考えよ.

非アルキメデス幾何

k : 体 k 上のノルムとす

$|\cdot|: k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 写像 $z = \sum a_i T^i$ とす

(1) $|0| = 0, |1| = 1$

(2) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(3) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (三角不等式)

アルキメデスの公理 : 任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して $\exists n \in \mathbb{Z}$ ($n = \overbrace{1+\dots+1}^{n \text{ 回}}$ の和) $\frac{r}{n} \in \mathbb{Q}$ (153)
 s.t. $r \leq |n|$

命題 アルキメデスの公理が成立しているならば

$$|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$$

⊙ 公理を否定すると $\exists r_0 > 0$ s.t. $|n| \leq r_0$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$)

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$|x+y|^n = |(x+y)^n| = \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^n \left| \binom{n}{k} \right| \cdot |x|^k \cdot |y|^{n-k}$$

$$\leq r_0 \sum_{k=0}^n \max(|x|, |y|)^n$$

$$|x+y| \leq ((n+1)r_0)^{\frac{1}{n}} \max(|x|, |y|)$$

$$n \rightarrow \infty \text{ と } |x+y| \leq \max(|x|, |y|) \quad //$$

アルキメデスの公理を満たさない norm は non-archimedean norm といい

$$(31) \quad \mathbb{R} : \text{任意の体} \quad |x| = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とすると $\exists$ アルキメデスの公理を満たさない norm (高次元の位相空間)

$$\mathbb{D}_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}((t)) = \left\{ \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n t^n \mid n_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n t^n \right| := e^{-n_0} \quad \text{if } a_{n_0} \neq 0$$

と定める ε non-archimedean norm

• $\mathbb{Q}$ 上, 非 Archimedean ノルム

$0 < \varepsilon < 1$ fix, p : 素数

$$x \in \mathbb{Q} \quad x = \frac{n}{m} \quad m \in m \text{ 素数 } p \text{ の方?}$$

$$= p^e \cdot (p \nmid \text{外, 素数 } p \text{ の方}) \quad e \in \mathbb{Z}$$

$$|x|_p := \varepsilon^e \quad \text{と定める} \quad (\mathbb{Q} \text{ を } p \text{ による } \mathbb{Q}_p \text{ 完備化 (} p \text{ 分体 } : \mathbb{Q}_p \text{)})$$

[Ostrowski の定理: $\mathbb{Q}$ 上の non-arch norm 1 つしか, t には ない]

$$\begin{array}{ccc} |\cdot| : \text{non-arch norm} & \text{val} : k \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ \downarrow & \downarrow \\ x \longmapsto & -\log |x| \end{array}$$

$$\text{val} \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n t^n \right) = n_0 \quad \left(\begin{array}{l} \log_t |\cdot| \text{ a } t \rightarrow 0 \\ z \rightarrow \text{limit} \end{array} \right)$$

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^k c_i t^{d_i} x^{n_i} y^{m_i} \quad c_i \neq 0 \quad d_i \in \mathbb{Z}$$

$$f(x, y) = \min (d_i + n_i x + m_i y; \quad i=1, \dots, k)$$

$F(x, y) = 0$ の $t \rightarrow 0$ $\rightsquigarrow$ $f(x, y)$ の non-smooth locus : トロピカル多項式
これは T 上の

定理 (Kapuror)

非孤立点の存在

$$T = \left\{ (\text{val}(X), \text{val}(Y)) \mid \begin{array}{l} X, Y \in \mathbb{C}((t))^{\times} \\ F(X, Y) = 0 \end{array} \right\}$$

周期積分

$$X + Y + \frac{t}{XY} = 1$$

Holomorphic differential form $\frac{dX}{X} \wedge \frac{dY}{Y}$ $(\mathbb{C}^{\times})^2$ 上

$$\Omega = \frac{\frac{dX}{X} \wedge \frac{dY}{Y}}{d\left(X + Y + \frac{t}{XY} - 1\right)}$$

← 零因子

$$X + Y + \frac{t}{XY} = 1$$

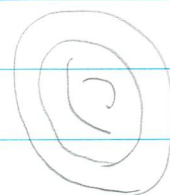
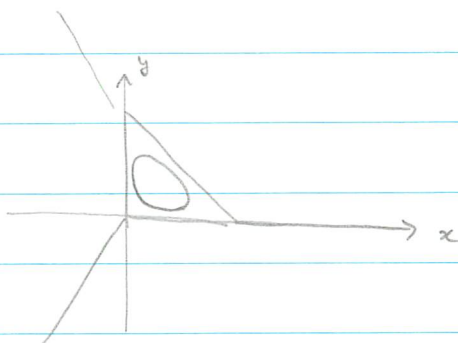
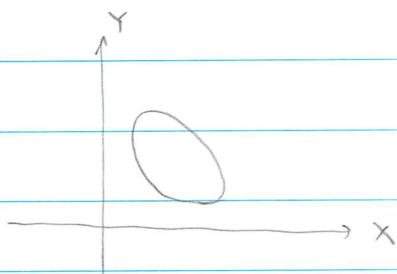
$$X + Y + \frac{t}{XY} = 1$$

is well-defined

is not

$$= \frac{\frac{dX}{X}}{\frac{\partial}{\partial \log Y} \left(X + Y + \frac{t}{XY} - 1 \right)} = \frac{\frac{dX}{X}}{Y - \frac{t}{XY}}$$

$X, Y \in \mathbb{R}_{>0}$ に制限する



$$C = \left\{ (X, Y) \in (\mathbb{R}_{>0})^2 \mid X + Y + \frac{t}{XY} = 1 \right\}$$

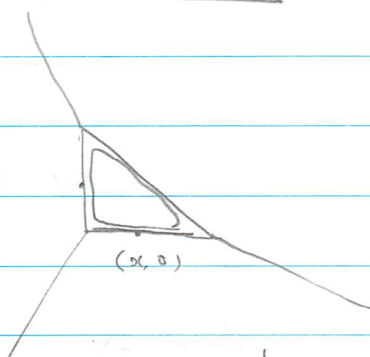
$$\int_C \frac{\frac{dX}{X}}{Y - \frac{t}{XY}}$$

積分

$$(X, Y) \in C \text{ について}$$

$$X = t^x, Y = t^y \text{ として } (X, Y) \text{ は正}$$

$t \rightarrow 0$ への振る舞いを考える



$(x, 0)$ の近傍を調べる

$$\Omega = \frac{\frac{dX}{X}}{Y - \frac{t}{XY}} \approx (\log t) dx$$

小さい

$$X + Y + \frac{t}{XY} = 1$$

主要項

$$Y \approx 1 \text{ として}$$

$$\int \Omega \approx \log t$$

$$(X, \frac{t}{XY} \text{ は小さい})$$

他の3辺でも同様の考察を行う

$$\int_C \Omega \approx 3 \log t$$

↑
tropical の長さ

演習

$$X + Y + 1 = 0 \text{ の } t \rightarrow 0 \text{ の面積}$$

$$\frac{3 \zeta(2)}{-\log t} \text{ として}$$

～ 点の位置関係はよく

$$\left(\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)$$